



e-ISSN: 2319-8753 | p-ISSN: 2320-6710

# IJIRSET

International Journal of Innovative Research in  
**SCIENCE | ENGINEERING | TECHNOLOGY**



# INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATIVE RESEARCH

IN SCIENCE | ENGINEERING | TECHNOLOGY

Volume 10, Issue 6, June 2021

**ISSN** INTERNATIONAL  
STANDARD  
SERIAL  
NUMBER  
INDIA

**Impact Factor: 7.512**



9940 572 462



6381 907 438



ijirset@gmail.com



www.ijirset.com

# О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова

**Ashurova Zebiniso Raximovna, Juraeva Nodira Yunusovna, Juraeva Umidakhon  
Yunusalievna**

Candidate Physical-Mat. Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Samarkand State  
University, Uzbekistan

Candidate Physical-Mat Sciences, Associate Professor, Department of Natural Sciences, Samarkand Branch of T  
University IT, Uzbekistan

Assistant, Department of Mathematical Analysis, Samarkand State University, Uzbekistan

## RESUME

In this article we consider Carleman's functions, to find integral representation for the polygarmonious functions defined in unbounded domain of Euclidean space which satisfies  $2n \geq m$ .

## РЕЗЮМЕ

В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области  $D \subset R^2$ , где D-неограниченная область, лежащая  $\{y_2 > 0\}$ , с границей  $\partial D$ ,  $\partial D = \{y : y = (y_1, y_2), y_2 = f(y_1)\}$ ,  $y_2 = f(y_1)$  непрерывная функция, имеющая ограниченные частные производные первого порядка.

## Резюме

Бу ишда ҳақиқий 2-ўлчовли Евклид фазосидаги маълум чегараланмаган соҳаларда  $2n \geq m$  шартни қаноатлاندирган 2-чи тартибли полигармоник функцияларнинг интеграл формуласи ва уларнинг хоссаларини аниқлаш учун Карлеман функциясининг баъзи хоссалари ўрганилган.

**Задача.** Пусть

$$u \in C^{2n}(D) \text{ и } \Delta^n u(y) = 0, y \in D \quad (1)$$

$$u(y) = F_0(y), \Delta u(y) = F_1(y), \dots, \Delta^{n-1} u(y) = F_{n-1}(y), y \in S, \quad (2)$$

$$\frac{du(y)}{d\bar{n}} = G_0(y), \frac{d\Delta u(y)}{d\bar{n}} = G_1(y), \dots, \frac{d\Delta^{n-1} u(y)}{d\bar{n}} = G_{n-1}(y), y \in S,$$

где  $F_i(y), G_i(y), i = 0, 1, \dots, n-1$ , заданные на  $S (S \subset \partial D)$  непрерывные функции,  $\bar{n}$  - внешняя нормаль к  $\partial D$  требуется восстановить  $u(y)$  в  $D$ .

Будем предполагать, что решение  $u(y)$  задачи (1)-(2) существует и непрерывно  $2n-1$  раз дифференцируемо, вплоть до конечных точек границы и удовлетворяет определенному условию роста (класс корректности), который обеспечивает единственность решения.

Функции  $\Phi_\sigma(y, x)$  при  $s > 0, \sigma \geq 0, a \geq 0, 2n \geq m$  ( $m$  – размерность пространство), определим:

$$\Phi_\sigma(y, x) = C_{n,m} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(\sigma w + w^2) - \operatorname{achi} \rho_1 \left( w - \frac{h}{2} \right)}{w - x_1} \right] (u^2 - s)^{n-k} du, \quad w = iu + y_1 \quad (3)$$

$$C_{n,m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left( \Gamma(n - \frac{m}{2} + 1) 2^{2n-1} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(n) \right)^{-1}$$

**Теорема 1.** Для функции  $\Phi_\sigma(y, x)$  имеет место

$$\Phi_\sigma(y, x) = C_{n,m} r^{n-k} \ln r + G_\sigma(y, x),$$

где  $G_\sigma(y, x)$  регулярная по переменному  $y$  и непрерывно дифференцируемая на  $D \cup \partial D = \overline{D}$ .

*Доказательство.* Для того, чтобы получить утверждение теоремы, рассмотрим подынтегральное выражение

$$J_1 = \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(\sigma w - w^2)}{w - x_1} \right]$$

Если обозначить  $y_1 - x_1 = \beta_1$  и имея ввиду свойства гиперболических функций, получим

$$\begin{aligned} \exp(\sigma w + w^2) &= \exp[\sigma(iu + \beta_1) + (iu + \beta_1)^2] = \\ &= \exp[\sigma\beta_1 + \beta_1^2 - u^2] \exp i[\sigma u + 2u\beta_1], \end{aligned}$$

и тогда  $J_1$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} J_1 &= \exp(\sigma\beta_1 + \beta_1^2) \operatorname{Im} \frac{(\beta_1 - iu)(\cos(\sigma u + 2u\beta_1) + i \sin(\sigma u + 2u\beta_1))}{(\beta_1 - iu)(\beta_1 + iu) \exp(u^2)} = \\ &= \exp(\sigma\beta_1 + \beta_1^2) \frac{\beta_1 \sin(\sigma u + 2u\beta_1) - u \cos(\sigma u + 2u\beta_1)}{(\beta_1^2 + u^2 + s) \exp(u^2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Если} \quad J_1^1 = \exp(\sigma\beta_1 + \beta_1^2) \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \frac{\beta_1 \sin(\sigma u + 2u\beta_1)}{(\beta_1^2 + u^2 + s) \exp(u^2)} (u^2 - s)^{n-k} du$$

и

$$J_1^2 = \exp(\sigma\beta_1 + \beta_1^2) \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \frac{u \cos(\sigma u + 2u\beta_1)}{(\beta_1^2 + u^2 + s) \exp(u^2)} (u^2 - s)^{n-k} du,$$

то

$$\Phi_\sigma(y, x) = C_{n,m} (J_1^1 - J_1^2) C_{n,m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left( \Gamma(n - \frac{m}{2} + 1) 2^{2n-1} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(n) \right)^{-1}.$$

Отсюда и следует наша теорема.

**Лемма 1.** Если  $\varphi_\sigma(y, x)$  гармоническая функция в  $R^m$  по переменной  $y$  включая и точку  $x$ , то справедливо равенство

$$\Delta r^k \varphi_\sigma(y, x) = r^{k-2} \varphi_{\sigma,1}(y, x),$$

где функция

$$\varphi_{\sigma,1}(y, x) = (kn + k(k-2))\varphi_\sigma(y, x) + 2k \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_j}$$

тоже является гармонической функцией в  $R^m$  по переменному  $y$  включая точку  $x$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} \Delta r^k \varphi_\sigma(y, x) &= knr^{k-2} \varphi_\sigma(y, x) + \sum_{j=1}^m k(y_j - x_j) \left( \frac{\partial r^{k-2}}{\partial y_j} \right) \varphi_\sigma(y, x) \\ &+ 2k \sum_{j=1}^m (y_j - x_j) r^{k-2} \frac{\partial \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^m r^k \frac{\partial^2 \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_j^2}. \end{aligned}$$

Так как  $\varphi_\sigma(y, x)$  гармоническая функция в  $R^m$  по переменной  $x$ , включая и точку  $y$ , то

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^m (y_j - x_j) \frac{\partial r^{k-2}}{\partial y_j} \varphi_\sigma(y, x) &= k \sum_{j=1}^m (k-2)(y_j - x_j)^2 r^{k-4} \varphi_\sigma(y, x) = \\ &= k(k-2) \sum_{j=1}^m (y_j - x_j)^2 r^{k-4} \varphi_\sigma(y, x) = k(k-2) r^{k-2} \varphi_\sigma(y, x) \end{aligned}$$

$$\Delta r^k \varphi_\sigma(y, x) = (kn + k(k-2))r^{k-2} \varphi_\sigma(y, x) + 2kr^{k-2} \sum_{j=1}^m (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_j}$$

Если

$$\varphi_{\sigma,1}(y, x) = (kn + k(k-2))\varphi_\sigma(y, x) + 2k \sum_{j=1}^m (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi_\sigma(y, x)}{\partial y_j}$$

Обозначая,  $c = (kn + k(k-2)) = k(n+k-2)$ , так как  $\varphi_\sigma(y, x)$  гармоническая  $R^m$  по переменной  $y$ , включая и точку  $x$ , отсюда следует утверждение леммы.

**Следствие 1.** При условиях леммы 1 справедливо равенство  $\Delta^k r^m \varphi_\sigma(y, x) = r^{m-2k} \varphi_{\sigma,k}(y, x)$ , где  $\varphi_{\sigma,k}(y, x)$  гармоническая функция в  $R^m$  по переменной  $y$  включая и точку  $y = x$ .

**Следствие 2.** Справедливы равенства  $\Delta r^k = k(k+m-2)r^{k-2}$ ,

$$\Delta r^k \ln r = k(k+m-2)r^{k-2} \ln r + (2k+m-2)r^{k-2}$$

**Теорема 2.** Функция  $\Phi_\sigma(y, x)$ , определяемая при помощи формулы (3) является полигармонической функцией порядка  $p$  по  $y$  при  $s > 0$ .

**Теорема 3.** При фиксированном  $x \in D$  функция  $\Phi_\sigma(y, x)$  удовлетворяет

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D \setminus S} \left| \Delta^k \Phi_\sigma(y, x) - \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| ds_y \leq C(x) \varepsilon(\sigma),$$

где постоянная  $C(x)$  зависит от  $x$  и  $\bar{n}$ -внешняя нормаль к  $\partial D$ ,  $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$  когда  $\sigma \rightarrow \infty$ .

**Следствие 3.** Функция  $\Phi_\sigma(y, x)$ , определяемая при помощи формулы (3) является функцией Карлемана для точки  $x \in D$  и части  $\partial D \setminus S$ .



### Литература

1. Ашурова З.Р. Фазлиддинова Нилуфар. ФУНКЦИИ КАРЛЕМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ОБЛАСТИ. УДК 51, 53 ЛУЧШАЯ научноисследовательская Работа 2019 сборник статей XXI Международного научно-исследовательского конкурса, Состоявшегося 30 июля 2019г. в г. Пенза Пенза МЦНС «НАУКА И ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2. Ашурова З.Р. Жұраева Н.Ю. Жұраева У.Ю. Problem of regularization for growing polygarmonic functions of some class Monografiarokonferencyjna. Берлин 31.08.2020. Германия. р. 198-201
3. Ашурова З.Р. Жұраева Н.Ю. Жұраева У.Ю. Полигармонические функции и задача Коши SCIENCE AND EDUCATION: PROBLEMS AND INNOVATIONS. 7 май 2020г. Российская Федерация, г. Пенза. стр. 42-45
4. Ашурова З.Р. Жұраева Н.Ю. Жұраева У.Ю. TASK CAUCHY AND CARLEMAN FUNCTION ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal. <https://saarj.com>. 5 May 2020. Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra India. p. 1784-1789
5. Ашурова З.Р. Жұраева Н.Ю. Жұраева У.Ю. GROWING POLYGARMONIC FUNCTIONS AND THE CAUCHY PROBLEM SCOPUS <http://dx.doi.org/10.31838/jcr.07.07.62> Journal of Critical Reviews Vol 7, Issue 7, 2020. ISSN 2394-5125. P371-378 Country: India



**Impact Factor:  
7.512**



# **INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATIVE RESEARCH**

**IN SCIENCE | ENGINEERING | TECHNOLOGY**

**9940 572 462 6381 907 438 ijirset@gmail.com**



**www.ijirset.com**

Scan to save the contact details