



e-ISSN: 2319-8753 | p-ISSN: 2320-6710

# IJIRSET

International Journal of Innovative Research in  
**SCIENCE | ENGINEERING | TECHNOLOGY**

# INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATIVE RESEARCH

IN SCIENCE | ENGINEERING | TECHNOLOGY

Volume 10, Issue 6, June 2021

**ISSN** INTERNATIONAL  
STANDARD  
SERIAL  
NUMBER  
INDIA

**Impact Factor: 7.512**

9940 572 462

6381 907 438

[ijirset@gmail.com](mailto:ijirset@gmail.com)

[www.ijirset.com](http://www.ijirset.com)

# **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НАСЛЕДСТВЕННОЙ УПРУГОСТИ**

ЮСУПОВ МАЖИД –к. ф.-м.н., Ташкентской областной Чирчикский  
государственный педагогический институт.

РАХМАНКУЛОВА БАРНА ОКТАМХАНОВНА – доцент, к.э.н., Ташкентский институт инженеров ирригации  
и механизации сельского хозяйства

АБДУРАИМОВ ЖУРЪАТБЕК ГОФУРОВИЧ –преподаватель, Ташкентской  
областной Чирчикский государственный педагогический институт.

АБДИКАЙИМОВА ГУЛНОЗ АДИЛОВНА – старший преподаватель кафедры «Высшая математика»  
Ташкентский Государственный  
Технический Университет имени И.Каримова

**Аннотация.** Разработаны численные методы решения нелинейных задач наследственной упругости на основе использования квадратурных формул. В качестве ядра релаксации использованы, ядро Колтунова-Ржаницына, имеющее слабо-сингулярные особенности типа Абеля. Эффективность численного приближенного моделирования показана на примере решения известных тестовых задач. Рассмотрены конкретные прикладные задачи, имеющие практическое применение.

**Ключевые слова:** ядро релаксации, интегро-дифференциальные уравнения, частота, амплитуда, наследственность, вязкоупругость, напряжение, деформация, асимптотические методы, интегральный оператор, кривой ползучести.

**Введение.** Во многих отраслях современного производства широко используются конструкции, элементы которых выполнены из материалов, проявляющих ярко выраженные наследственные свойства, в том числе, нелинейно-вязкоупругих материалов. В процессе эксплуатации, а также в аварийных ситуациях такие элементы могут подвергаться разного рода динамическим воздействиям, поэтому исследования переходных колебательных процессов в вязкоупругих телах приобретают большой практический интерес.

На современное строительство гидротехнических сооружений используются различные конструкции, которые их материалы обладающие ярко выраженными реологическими свойствами. Использование этих конструкций обеспечиваются экономичность, долговечность, стойкость и безопасность сооружений. Поэтому, учет реологических свойств материалов на проектирование строительство привлекает все большой интерес специалистов.

Напоминаем, что многочисленные практические технические задачи в математическом модели описывается системами дифференциальными, интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями. Для линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений имеется ряд рекомендуемых численные и аналитические методы решения [1-3, 10, 11, 12].

Последнее время в современной технике широко применяются материалы, сочетающие упругие, вязкие и пластические свойства. Такие материалы обладают релаксационными свойствами - процессы их деформирования зависят от времени. К таким материалам относятся полимеры, бетоны, сплавы, металлы (при повышенных температурах) и др. Некоторые конструкции под нагрузкой (например, амортизирующие и виброзащитные устройства) в целом ведут себя как вязкоупругой системы. Основные физические уравнения, связывающие напряжения и деформации вязкоупругих сред, содержат фактор времени. В качестве теории, описывающей процессы деформирования во времени, принята наследственная теория вязкоупругости,

построенная на основе принципа Больцмана-Волтерры [2,8,9,11]. Вследствие, таких задачи приводится к решению систем интегродифференциальных уравнение (ИДУ) типа Вольтерра.

Наиболее распространенными методами решения интегральное уравнение считаются асимптотическое методы [4-8]. Эти методы применим в тех случаях, когда вязкость среды достаточно мала, так что имеется возможность ввести малый параметр и построить решения, асимптотически точные. Асимптотические методы можно применить для решения задач механики, наследственные свойства материала несущественны по сравнению с упругими, т.е. существует достаточно малая параметр перед интегральным членом уравнения состояния. Надо отметить что, с течением времени погрешность этих методы существенно увеличивается.

Для решения линейных ИДУ разработан ряд методы, один из них приведена в работе [12], где построена точноаналитическьерешение линейныхИДУ типа Вольтерра для ядра Ю.Н.Работнова, как развитием метода Ф.Трикоми [13]. Кроме того, доказаны теоремы сложения.

Использование новых композитных материалов в инженерной практике, проектирование и создание прочных, легких и надежных конструкций требует дальнейшего совершенствования деформируемых тел и разработка методов их расчета с учетом реальных свойств конструкционных материалов. В реальных технических системах характеристики вязкоупругих элементов являются нелинейными. Поэтому разработка эффективных методов решения нелинейныхИДУ является актуальной в наследственной механике деформируемого твердого тела.

**Постановка задач.** Найти решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(1 - R^*)[x(t) + L[x(t)]] = f(t) \quad (1)$$

при следующих

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (2)$$

начальных условиях. Где  $x(t)$  – вектор неизвестных функции,  $L[x(t)]$  – нелинейная часть уравнение,  $f(t)$  – заданная вектор функции,  $\omega^2$  – заданные матрица,  $x_0, \dot{x}_0$  – заданные векторы,  $R^*$  – интегральный оператор с ядром релаксации  $R(t) = \varepsilon t^{\alpha-1} e^{-\beta t}$ :

$$R^* \varphi = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

**Алгоритм решения:** Два раза интегрируя по времени в интервале  $[0; t]$  система уравнение (1) и учитывая начальное условие (2), имеем [14-17]:

$$x(t) - x_0 - \dot{x}_0 t + \omega^2 \int_0^t G(t-s)[x(s) + L[x(s)]] ds = \int_0^t (t-s) f(s) ds, \quad (3)$$

где  $G(t-s) = t-s - \int_0^{t-s} (t-s-\tau) R(\tau) d\tau$ .

Полагая  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ( $\Delta t$  – шаг по времени) в (3), и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеции имеем:

$$x_n = x_0 + \dot{x}_0 t_n - \omega^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i G(t_n - t_i) [x_i + L(x_i)] + \sum_{i=0}^{n-1} A_i (t_n - t_i) f(t_i)$$

где  $x_n = x(t_n)$ ,  $A_0 = \frac{\Delta t}{2}$ ,  $A_j = \Delta t, j = \overline{1, n-1}$ .

**Результаты и выводы.** Проверки адекватности разработанного алгоритма и соответствующие ее компьютерной программы осуществлялось при решении следующей задачи:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(1 - R^*)[x(t) + \gamma \cdot x^3(t)] = e^{-\beta t} \left\{ \beta^2 + \omega^2(1 + \gamma e^{-2\beta t}) - \omega^2 \varepsilon \left[ t + \frac{\gamma}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \right] \right\}$$

$$x(0) = 1; \quad \dot{x}(0) = -\beta$$

которое имеет точное решение:

$$x(t) = e^{-\beta t}.$$

Полученные численные результаты приведена в таблица 1. Расчеты аналитических и приближенных решений проведены при следующих значениях:  $\omega^2 = 8$ ;  $\gamma = 0,36$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,01$ ;  $\Delta t = 0,05$ .



Аналитические точные решение и полученные численные приближённые решение при различных значениях шага квадратурное формулы в некоторых промежутки времени приведены в таблицы 1.

Таблица 1.

t	Точное решение	Приближенное решение		
		$\Delta t = 0,01$	$\Delta t = 0,05$	$\Delta t = 0,1$
1	0,9512294	0,9512296	0,9512346	0,9512496
2	0,9048374	0,9048371	0,9048273	0,9047971
3	0,8607080	0,8607087	0,8607220	0,8607630
4	0,8187308	0,8187304	0,8187146	0,8186652
5	0,7788008	0,7788020	0,7788185	0,7788705
6	0,7408182	0,7408183	0,7408024	0,7407513
7	0,7046881	0,7046896	0,7047032	0,7047477
8	0,6703200	0,6703209	0,6703107	0,6702757
9	0,6376282	0,6376299	0,6376355	0,6376571
10	0,6065307	0,6065325	0,6065318	0,6065246

Из таблицы видно что, расхождение результатов численного приближенного моделирования с аналитическим решением составляет менее 0,01%. Сформулированная вычислительная сходящееся решение дает возможность использование разработанного численного моделирование при решении конкретных прикладных задач вязкоупругости.

Из теории механике деформируемого твердого тела известно, что система (1) с начальными условиями (2) описывает математические модели, задачи как свободного и так вынужденного колебания вязкоупругого тела. Исследовано влияние вязкоупругих свойств материала, а также параметров входящие в (1) и (2) на колебательный процесс вязкоупругого тела. Нелинейная часть в (1) принята в виде  $L[x(t)] = \gamma \cdot x^3(t)$ . Здесь  $\gamma$  – коэффициент нелинейности. На рис. 1 показано влияние параметра нелинейности  $\gamma$  на поведение форме колебаний вязкоупругого тела, когда внешние нагрузка постоянно. Из графика видно, что колебательный процесс происходит около кривой ползучести. С увеличением параметра  $\gamma$  частота колебаний увеличивается, и амплитуда колебаний вязкоупругого тела уменьшается.

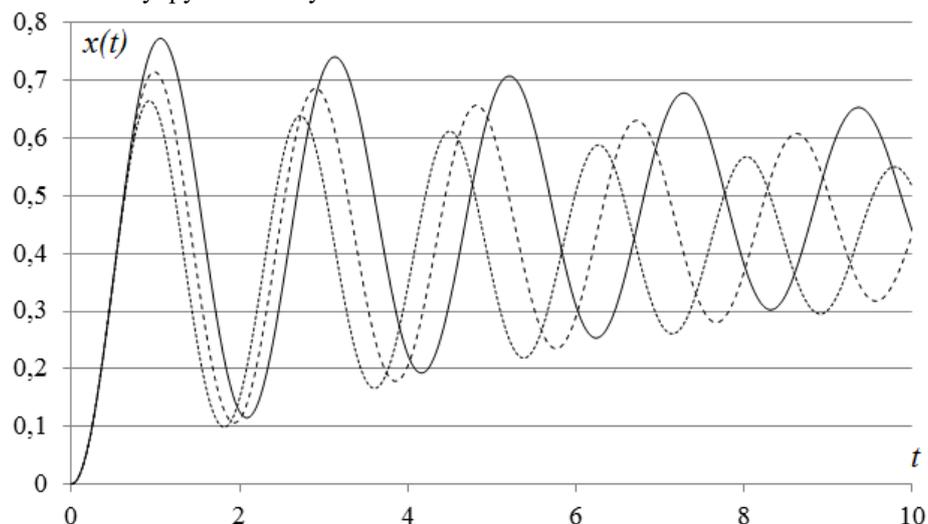


Рис 1.  $\omega^2 = 10,45$ ;  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  $f(t) = 3,5$ ;  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,05$ ;  $\gamma = 0$  (сплошная);  $\gamma = 0,3$  (пунктирная);  $\gamma = 0,7$  (точечная).

Исследован влияние параметра  $\gamma$  на формы колебания нелинейного вязкоупругого тела, при постоянной нагрузке (рис. 2). Из графика видно что, с увеличением параметра  $\gamma$  частота и амплитуда колебаний уменьшается.

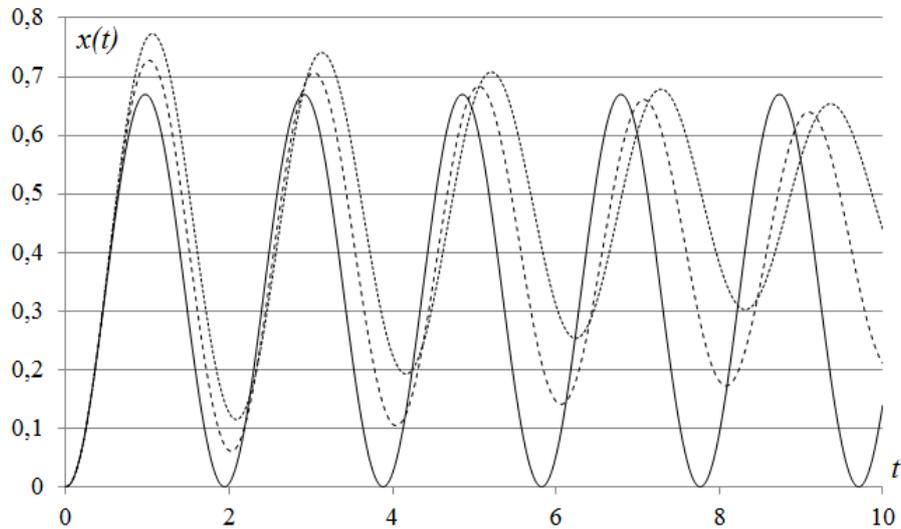


Рис 2.  $\omega^2 = 10,45$ ;  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  $f(t) = 3,5$ ;  $\gamma = 0,3$ ;  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0$  (сплошная);  $\varepsilon = 0,03$  (пунктирная);  $\varepsilon = 0,05$  (точичная)

Как влияет реологические параметры  $\alpha$  и  $\beta$  на формы колебание нелинейного вязкоупругого тела под действием постоянной нагрузке? Исследование параметра  $\alpha$  показала (рис. 3), что с увеличением  $\alpha$  частота колебаний увеличивается. Результаты исследования влияние параметра  $\beta$  на процесс колебаний вязкоупругого тела приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что параметр  $\beta$  не оказывает существенного влияние на амплитуду и частоту колебаний.

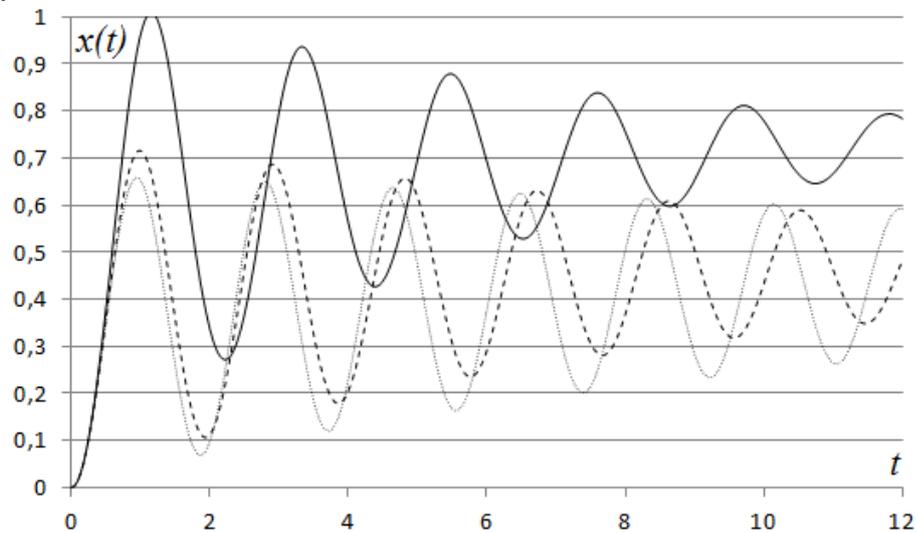


Рис 3.  $\omega^2 = 10,45$ ;  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  $f(t) = 3,5$ ;  $\gamma = 0,3$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,05$ ;  $\alpha = 0,1$  (сплошная);  $\alpha = 0,25$  (пунктирная);  $\alpha = 0,5$  (точичная).

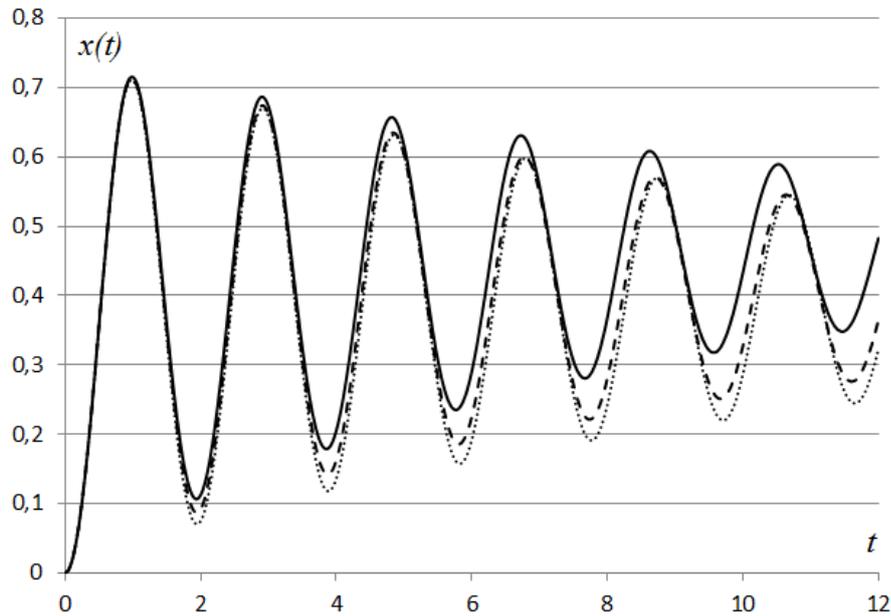


Рис 4.  $\omega^2 = 10,45$ ;  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  $f(t) = 3,5$ ;  $\gamma = 0,3$ ;  $\alpha = 0,25$ ;  $\varepsilon = 0,05$ ;  $\beta = 0,05$  (сплошная);  $\beta = 0,5$  (пунктирная);  $\beta = 1$  (точичная).

Исследованы влияние параметра  $\gamma$  на формы колебания вязкоупругого тела (рис. 5), когда внешние воздействия имеют сейсмический характер  $f(t) = f_0 \cdot e^{-bt} \sin \theta t$ . Где  $f_0$  – заданный константа,  $\theta$  – частота,  $b$  – декремент затухания. С увеличением значения параметра  $\gamma$  частота колебаний уменьшается, что приводит к существенному сдвигу фаз. На рис. 6 представлены зависимости форма колебаний вязкоупругого тела от параметра  $\theta$ . С увеличением частоты внешней воздействие частота колебаний увеличивается, при этом амплитуда уменьшается.

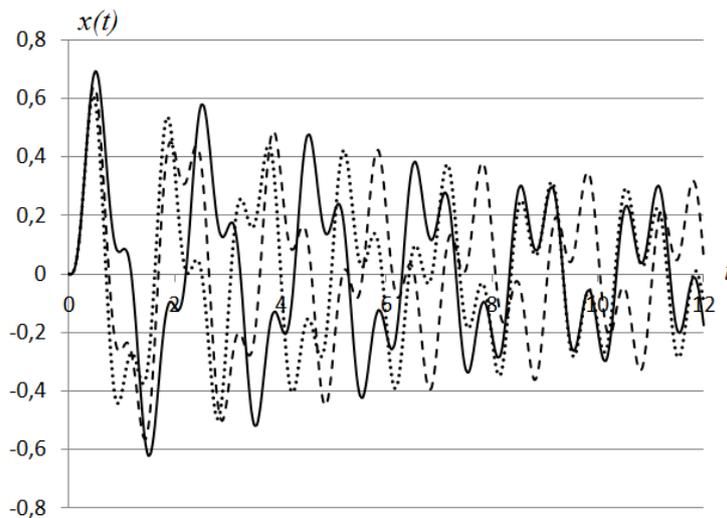


Рис 5.  $\omega^2 = 10,45$ ;  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,05$ ;  $f_0 = 13,6$ ;  $b = 0,01$ ;  $\theta = 3\pi$ ;  $\gamma = 0$  (сплошная);  $\gamma = 2$  (пунктирная);  $\gamma = 4$  (точичная).

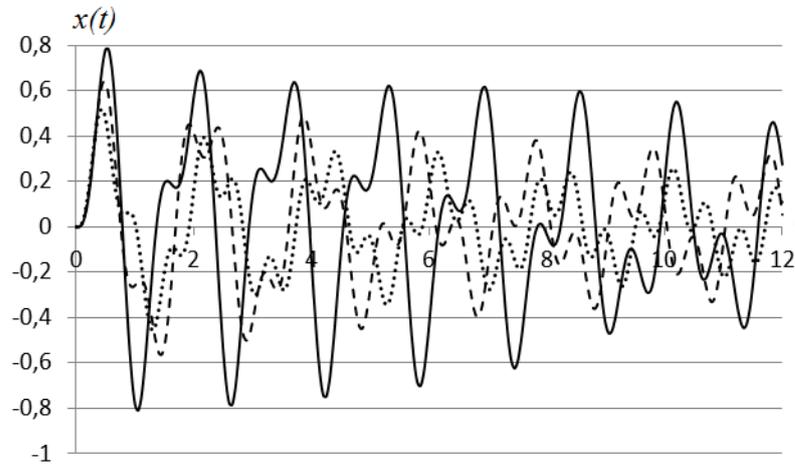


Рис 6.  $\omega^2 = 10,45$ ;  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,05$ ;  
 $f_0 = 13,6$ ;  $b = 0,01$ ;  $\gamma = 2$ ;  $\theta = 2,5\pi$  (сплошная);  
 $\theta = 3\pi$  (пунктирная);  $\theta = 3,5\pi$  (точечная).

**Заключение.** Отметим, что вышеизложенной методика, численное моделирование нелинейных задач наследственной вязкоупругости, можно использовать при динамических расчетах разного рода задач, как задачи нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругой трубы с протекающей через нее жидкости; задачи на исследования резонансных явлений в особо высотных сооружениях типа водонапорных и телевизионных башен; задачи нелинейных колебаний вязкоупругих стержней и пластин с переменными жесткостью; динамического гасителя колебаний наследственно-деформируемых систем, как конечной степени свободы, так и с распределенными параметрами. Все эти перечисленные задачи имеют важные практические интересы в различной области исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
2. Ильющин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970, 280 с.
3. Андронов А.А., Витт Ф.Ф., Хайкин С.Э. Теория колебания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1958., 916 с.
4. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955.
6. Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент, Фан, 1974, 215 с.
7. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009, 248 с.
8. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Киев, Наукова думка, 1986. 543 с.
9. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука 1977. 384 с.
10. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка. 1972.
11. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, Мехнат, 1987. 269 с.
12. Бадалов Ф.Б., Хужаяров Н.Ю. Об одном методе точного решения интегро-дифференциальных уравнений динамических задач линейной теории вязкоупругости // ДАН СССР, 1988. Т.299. №1. С. 71-76.
13. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: И.Л., 1962, 351 с.
14. Yusupov M., Rahkmankulova B., Aynagulov Sh. Numerical solutions of the problem of salt-transfer in soils. – 2019, E3S Web of Conferences (Tashkent).
15. Abdullaev Z., Yusupov M., Mirzaev S., Noraliev N., Kusharov Z. Dynamic dampers of vibrations of inherited-deformable systems with finite number of degrees of freedom. - 2020, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vladimir, Russian Federation).



16. Yusupov M., Rahkmankulova B., Ziyaeva Sh., Kushaev A. Vehicle oscillation taking into account the rheological properties of the suspension.- 2020, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vladimir, Russian Federation).
17. Yusupov M., Pardaboev A., Kubyashev K., Mavlanov S. Algorithm for calculating the processes of salt transfer in soils on reclaimed lands.- 2019, International Conference on Information science and communications technologies: Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2019. Tashkent, Uzbekistan.
18. Рахманкулова Б., Юсупов М., Мирзаев С. Численное моделирование задач динамики транспортных средств. Российский научный журнал «Научные горизонты», №2(42), 2021

Сведение об авторах.

Юсупов Мажид – к. ф.-м.н., Ташкентской областной Чирчикский государственный педагогический институт.

email: [yusupvmajid1956@mail.ru](mailto:yusupvmajid1956@mail.ru)

тел: (90) 959 17 23

Мирзаев Саиджан Сабитович – доцент, к.т.н., Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

email:

тел: (90) 9824606

Абдураимов Журъатбек Гофурович – преподаватель, Ташкентской областной Чирчикский государственный педагогический институт.

email: [juratbekabduraimov@gmail.com](mailto:juratbekabduraimov@gmail.com)

тел: (90) 984 35 46

Абдикайимова Гулноз Адилевна – старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Ташкентский Государственный Технический Университет имени И.Каримова

Email: [gulnozaabdikayimova@gmail.com](mailto:gulnozaabdikayimova@gmail.com)



**INNO SPACE**  
SJIF Scientific Journal Impact Factor

**Impact Factor:  
7.512**

**ISSN** INTERNATIONAL  
STANDARD  
SERIAL  
NUMBER  
INDIA



# INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATIVE RESEARCH

IN SCIENCE | ENGINEERING | TECHNOLOGY

 9940 572 462  6381 907 438  [ijirset@gmail.com](mailto:ijirset@gmail.com)



[www.ijirset.com](http://www.ijirset.com)

Scan to save the contact details